# 編 者 的 話

承前兩期, 冼鏡光教授以大量例證與多種證明方式闡釋：三角學的基本公式並不依賴畢氏定理, 甚而可以從三角學推導出畢氏等式與畢氏定理。這直接反駁了 Loomis 在名著《*The Pythagorean Proposition*》中「三角學建立在畢氏定理之上」的說法。

冼教授在「不使用畢氏定理」的前提下, 推導出角和與角差公式、倍角公式、半角公式、積化和、和化積公式。並藉由這些公式反過來可以推導出 $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$。他介紹 Mollweide 等式 $(a-b)/c = \sin((\beta-\gamma)/2)/\cos(\alpha/2)$, $(b+c)/a = \cos((\beta-\gamma)/2)/\sin(\alpha/2)$, 並給出：用正弦定律的證明、幾何證明, 及不用正弦定律的證明。接著他利用 Mollweide 等式可直接證明畢氏定理。

冼教授也提供正弦定律的多種非畢氏證明, 並用 Mollweide 等式直接推得正切定律。最後, 極富創意地, 用稠密集合與連續性證明畢氏等式。

在電磁學, $\delta$ 函數可視爲單位點電荷密度; 對三維空間的函數 $\rho(\boldsymbol{x})$, 有 $\iiint \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\rho(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \rho(\boldsymbol{x})$. George Green (1793~1841) 在 19 世紀就用到類似概念, 但直到 1927 年 Paul Dirac (1902~1984) 才正式提出 $\delta$ 函數, 而後 Sobolev 與 Schwartz 在廣義函數理論中建立完整理論。

Green 自學成才, 在 1828 年的論文中提出了格林函數與格林定理, 意圖確定真空中特定電位的導體所包圍的電位; 這是個 Poisson 方程 (非齊次 Laplace 方程) 的 Dirichlet 問題。Green 從點源 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 出發, 構造滿足 $\Delta G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 的函數, 並利用格林第二等式推導出格林表示公式。任何非齊次項都可視爲點源的疊加, 可由卷積得解。Green 將解分解爲體積分 (牛頓位) 及邊界積分 (雙層位勢)。較現代的說法是：格林函數 $G =$ 基本解 $\Gamma+$ 調和修正項 $w$, 其中 $w$ 用來滿足邊界條件, 基本解 $\Gamma$ 是「全空間的點源響應」, 而 $G$ 是「滿足邊界條件的點源響應」。

林琦焜教授強調體積分與曲面積分之間的量綱平衡。他引介並計算單層位勢 (來自 Neumann 邊界條件), 解釋爲何雙層位勢是「兩層電荷的差」。他詳細證明牛頓位是 Poisson 方程的特解。

在金融市場, 如何在不可預測的隨機環境中尋找可利用的結構? 單一波浪 (或單日股價) 不可預測, 但長期波譜 (或長期波動結構) 是穩定的。金融策略不預測明日漲跌, 而是利用均值回歸、區間震盪、波動反覆性來累積價差。波動本身就是資源, 但要如何轉化爲收益? 吳南靖教授介紹兩種策略：「網格交易」類似海床固定式點吸收器,「Shannon 再平衡」則類似隨水位調整的浮式結構。

**數學傳播電子版網址:**

https://www.math.sinica.edu.tw/mathmedia

梁惠禎
2026 年 6 月

數學傳播 198 第五十卷 第二期

# 目錄

畢氏定理的三角學證明: III
純三角學的證明 ·························· 冼鏡光 3

Green 函數 — 微分方程的施洗約翰 ············· 林琦焜 24

對「大小地圖上重疊的一點」一文的回響 ·········· 蕭偉智 65

隨機下的波動應對：探索工程與金融間的數學之美 吳南靖 70

2026 年第 15 屆歐洲女子數學奧林匹亞競賽試題解答 ·····
教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組 83

從拓樸學到數學教育：漢斯·弗賴登塔爾
(Hans Freudenthal) 對數學的洞察與反思 · 張 勇 93

手術理論的三個尺度 ························· 胡海量 106

共邊三角形的一個有趣性質····· 顏廷翰 · 黃品鈞 · 蕭偉智 118

對於兩個三角形面積的四則運算為定值的動點軌跡
之探討 ··················· 周均庭 · 郭晉宇 · 周賢祐 129

談平面歐拉不等式的又幾種加強 ·················· 張 贇 133

三度空間極座標與正多面體解析 ·················· 劉任昌 142